

មេរៀនទី១

ដេរីវេនៃអនុគមន៍

១. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រង់ $x = x_0$

១.១. និយមន័យដេរីវេ

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺកំណត់សរសេរដោយ៖

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{ដែល } \Delta y = f(x+h) - f(x) \text{ និង } \Delta x = x+h - x = h$$

១.២. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រង់ $x = x_0$

$$\text{ដេរីវេនៃអនុគមន៍ } f \text{ ត្រង់ } x = x_0 \text{ គឺកំណត់ដោយ } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

ដែល $h = x_0 + h - x_0 = x - x_0$ បើ $h \rightarrow 0$ គេបាន $x \rightarrow x_0$

$$\text{ដេរីវេនៃអនុគមន៍ } f \text{ ត្រង់ } x = x_0 \text{ អាចសរសេរទៅជាទម្រង់មួយទៀតគឺ៖ } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ឧទាហរណ៍៖ រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x) = x^2 - 1$ ត្រង់ $x = 2$

ចម្លើយ៖ រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x) = x^2 - 1$ ត្រង់ $x = 2$

$$\text{តាមនិយមន័យ៖ } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{គេបាន៖ } f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1 - (2^2 - 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

$$\text{ដូចនេះ៖ } f'(2) = 4$$

២. ភាពមានដេរីវេនៃអនុគមន៍

អនុគមន៍ $y = f(x)$ មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x = a$ លុះត្រាតែ៖

- អនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = a$
- ដេរីវេឆ្វេងស្មើដេរីវេស្តាំត្រង់ចំណុច $x = a$ គឺ $f'_-(a) = f'_+(a)$

$$\text{ដែល } f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ និង } f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ឧទាហរណ៍៖ សិក្សាភាពជាប់ និងភាពមានដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x) = \begin{cases} \sin x & , x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + x & , x < 0 \end{cases}$ ត្រង់ $x = 0$

ចម្លើយ៖ សិក្សាភាពជាប់ និងភាពមានដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x) = \begin{cases} \sin x & , x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + x & , x < 0 \end{cases}$ ត្រង់ $x = 0$

- សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x) = \begin{cases} \sin x & , x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + x & , x < 0 \end{cases}$ ត្រង់ $x = 0$

$$f \text{ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ } x = 0 \text{ កាលណា៖ } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\text{ដោយ: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{2}x^2 + x \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0$$

$$\text{គេបាន: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 0$

$$\bullet \text{ សិក្សាភាពមានដេរីវេនៃអនុគមន៍ } f(x) = \begin{cases} \sin x & , x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + x & , x < 0 \end{cases} \text{ ត្រង់ } x = 0$$

f មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x = 0$ កាលណា: $f'_-(0) = f'_+(0)$

$$\text{ដែល } f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{2}x^2 + x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) = 1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\text{គេបាន: } f'_-(0) = f'_+(0) = 1$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍មានដេរីវេត្រង់ $x = 0$

៣. រូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍

➤ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ពហុធា

អនុគមន៍	ដេរីវេ
$f(x) = k$ ដែល k ជាចំនួនពិត	$f'(x) = 0$
$f(x) = kx$ ដែល k ជាចំនួនពិត	$f'(x) = k$
$f(x) = x^n$ ដែល n ជាចំនួនពិត	$f'(x) = nx^{n-1}$

➤ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

អនុគមន៍	ដេរីវេ
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \sin u$	$f'(x) = u' \cos u$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \cos u$	$f'(x) = -u' \sin u$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$f(x) = \tan u$	$f'(x) = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
$f(x) = \cot u$	$f'(x) = -\frac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$

➤ ដេរីវេនៃអនុគតន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និង លោការីតនេពែរ

អនុគតន៍	ដេរីវេ
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \ln u$	$f'(x) = \frac{u'}{u}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = e^u$	$f'(x) = u' e^u$

➤ ដេរីវេនៃអនុគតន៍ត្រីកោណមាត្រច្រាស់

អនុគតន៍	ដេរីវេ
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arcsin u$	$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos u$	$f'(x) = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$f(x) = \arctan x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \arctan u$	$f'(x) = \frac{u'}{1+u^2}$
$f(x) = \operatorname{arccot} x$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \operatorname{arccot} u$	$f'(x) = -\frac{u'}{1+u^2}$

ចំណាំ៖ បើ $y = f(u)$ និង $u = g(x)$ គេបាន៖ $y' = f'(u) = \frac{df}{du} \times \frac{du}{dx} = f'(u)u'(x)$ (វិធានច្រវាក់)

បើ $y = uv$ គេបាន៖ $y' = u'v + v'u$

បើ $y = u \pm v$ គេបាន៖ $y' = u' \pm v'$

បើ $y = \frac{u}{v}$ គេបាន៖ $y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

បើ $y = \frac{c}{v}$, $c \in \mathbb{R}$ គេបាន៖ $y' = -\frac{cv'}{v^2}$

លំហាត់

១. គណនាដេរីវេនៃអនុគតន៍

ក. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$

ខ. $f(x) = (2x-1)(x+1)$

គ. $f(x) = (2x+1)^4$

ឃ. $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x + 8}$

ចម្លើយ៖

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

$$\text{ក. } f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$$

$$\text{គេបាន៖ } f'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' - \left(\frac{x^2}{2}\right)' - (2x)' = \frac{3x^2}{3} - \frac{2x}{2} - 2 = x^2 - x - 2$$

$$\text{ដូចនេះ៖ } f'(x) = x^2 - x - 2$$

$$\text{ខ. } f(x) = (2x-1)(x+1)$$

$$\text{គេបាន៖ } f'(x) = (2x-1)'(x+1) + (2x-1)(x+1)' = 2(x+1) + (2x-1) = 4x+1$$

$$\text{ដូចនេះ៖ } f'(x) = 4x+1$$

$$\text{គ. } f(x) = (2x+1)^4$$

$$\text{គេបាន៖ } f'(x) = 4(2x+1)'(2x+1)^3 = 4 \times 2(2x+1)^3 = 8(2x+1)^3$$

$$\text{ដូចនេះ៖ } f'(x) = 8(2x+1)^3$$

$$\text{ឃ. } f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x + 8}$$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន៖ } f'(x) &= \frac{(x^2 + 2x - 3)'(2x + 8) - (2x + 8)'(x^2 + 2x - 3)}{(2x + 8)^2} \\ &= \frac{(2x + 2)(2x + 8) - (2)(x^2 + 2x - 3)}{(2x + 8)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 16x + 4x + 16 - 2x^2 - 4x + 6}{(2x + 8)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 16x + 22}{(2x + 8)^2}\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ៖ } f'(x) = \frac{2x^2 + 16x + 22}{(2x + 8)^2}$$

២. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

$$\text{ក. } f(x) = \sin x - x \cos x$$

$$\text{ខ. } f(x) = \cos^2 x + \sin 2x$$

ចម្លើយ៖ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

$$\text{ក. } f(x) = \sin x - x \cos x$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= (\sin x)' - (x \cos x)' \\ &= \cos x - [x' \cos x + x(\cos x)'] \\ &= \cos x - (\cos x - x \sin x) = x \sin x\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ៖ } f'(x) = x \sin x$$

$$\text{ខ. } f(x) = \cos^2 x + \sin 2x$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (\cos^2 x)' + (\sin 2x)' \\
 &= 2(\cos x)' \cos x + (2x)' \cos 2x \\
 &= -2 \cos x \sin x + 2 \cos 2x \\
 &= -\sin 2x + 2 \cos 2x
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $f'(x) = -\sin 2x + 2 \cos 2x$

៣. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

ក. $f(x) = x(1+e^x)$

ខ. $f(x) = 1 - 2x - \frac{\ln x}{x}$

គ. $f(x) = x + 1 - \frac{4e^x}{1+e^x}$

ឃ. $f(x) = \frac{x}{2} - \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

ចម្លើយ៖ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

ក. $f(x) = x(1+e^x)$

គេបាន៖

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= x'(1+e^x) + (1+e^x)' x \\
 &= 1 + e^x + xe^x
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $f'(x) = 1 + e^x + xe^x$

ខ. $f(x) = 1 - 2x - \frac{\ln x}{x}$

គេបាន៖

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (1-2x)' - \left(\frac{\ln x}{x}\right)' \\
 &= -2 - \frac{(\ln x)' x - x' \ln x}{x^2} \\
 &= -2 - \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} \\
 &= \frac{-2x^2 - 1 + \ln x}{x^2}
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $f'(x) = \frac{-2x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$

គ. $f(x) = x + 1 - \frac{4e^x}{1+e^x}$

គេបាន៖

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (x+1)' - \left(\frac{4e^x}{1+e^x} \right)' \\
 &= 1 - \frac{(4e^x)'(1+e^x) - (1+e^x)'(4e^x)}{(1+e^x)^2} \\
 &= 1 - \frac{(4e^x)(1+e^x) - (e^x)(4e^x)}{(1+e^x)^2} \\
 &= 1 - \frac{4e^x + 4e^{2x} - 4e^{2x}}{(1+e^x)^2} \\
 &= 1 - \frac{4e^x}{(1+e^x)^2}
 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(1+e^x)^2}$

ឃ. $f(x) = \frac{x}{2} - \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

គេបាន៖

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{x}{2} \right)' - \left[\ln\left(\frac{x-1}{x} \right) \right]' \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{x-1}{x} \right)'}{\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{2} - \frac{(x-1)'x - x'(x-1)}{\frac{x^2}{x-1}} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{\frac{x-(x-1)}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x(x-1)}
 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x(x-1)}$

៤. គេមាន $y = \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $xy' + 1 = e^y$

ចម្លើយ៖ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $xy' + 1 = e^y$

គេមាន $y = \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$

$$\begin{aligned}
 \text{គេបាន } y' &= \frac{\left(\frac{1}{1+x} \right)'}{\frac{1}{1+x}} = \frac{-\frac{(1+x)'}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x}} = -\frac{1}{(1+x)^2} \times (1+x) = -\frac{1}{1+x}
 \end{aligned}$$

វិនិច្ឆ័យ៖ $xy' + 1 = x \left(-\frac{1}{1+x} \right) + 1 = -\frac{x}{1+x} + 1 = \frac{-x + 1 + x}{1+x} = \frac{1}{1+x}$

ហើយ $e^y = e^{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)} = \frac{1}{1+x}$

ដូចនេះ $xy' + 1 = e^y$ (ពិត)