មេរៀនទី១ ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

និយមន័យវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

វ៉ិចទ័រក្នុងលំហគឺជាអង្កត់មានទិសដៅក្នុងលំហ។ គេកំណត់តាងវ៉ិចទ័រ $\mathbf{AB}$ ដោយ $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ ដែលមាន $\mathbf{A}$ ជាគល់ និង $\mathbf{B}$ ជាចុង។

គេកំណត់វ៉ិចទ័រ $\mathbf{AB}$ ដោយ $\overrightarrow{\mathbf{AB}}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$ ដែល $\mathbf{A}(x_A,y_A,z_A)$ និង $\mathbf{B}(x_B,y_B,z_B)$ ។

ប្រវែងនៃវ៉ិចទ័រ $\mathbf{AB}$ គឺ $\mathbf{AB}=\left|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

គេអាចតាងកំប៉ូសង់វ៉ិចទ័រក្នុងលំហដោយ $\overrightarrow{\mathbf{AB}}=(x,y,z)$ ឬ $\overrightarrow{\mathbf{AB}}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

ផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

គេមាន៖ $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ និង $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ ជាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

គេបានផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ គឺជាចំនួនពិតដែលកំណត់ដោយ

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(x_1,y_1,z_1)\cdot(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

$|\vec{u}\cdot\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ (បំណកស្រាយតាមបែបធរណីមាត្រ)

លក្ខណៈផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ

បើ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ និង c ជាចំនួនពិត នោះគេបាន

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
2. $c(\vec{v}\cdot\vec{u})=(c\vec{v})\cdot\vec{u}=\vec{v}\cdot(c\vec{u})$
3. $\vec{u}\cdot\vec{0}=\vec{0}\cdot\vec{u}=0$
4. $\vec{v}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|^2$
5. បើ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ នោះ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់នឹងគ្នា

១.និយមន័យផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

១.១.និយមន័យ

គេមាន៖ $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ និង $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ ជាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

គេបានផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ កំណត់ដោយ $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$ ដែលជាដេទែរមីណង់លំដាប់បី

ដោយដាក់កូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ក្នុងជួរដេកទី២ និង កូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ ក្នុងជួរដេកទី៣ ។

ឧទាហរណ៍៖ គេមាន៖ $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ និង $\vec{v}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ ជាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

រកវ៉ិចទ័រ៖ ក. $\vec{u}\times\vec{v}$ ខ. $\vec{v}\times\vec{u}$ គ. $\vec{v}\times\vec{v}$

ដំណោះស្រាយ៖ រកវ៉ិចទ័រ

ក. $\vec{u}\times\vec{v}$

គេបាន៖ $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-2&1\\3&1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&1\\3&-2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&-2\\3&1\end{vmatrix}\vec{k}$

$$=(4-1)\vec{i}-(-2-3)\vec{j}+(1+6)\vec{k}=3\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k}$$

ដូចនេះ $\vec{u}\times\vec{v}=3\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k}$

ខ. $\vec{v}\times\vec{u}$

គេបាន៖ $\vec{v}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&1&-2\\1&-2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2\\-2&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3&-2\\1&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3&1\\1&-2\end{vmatrix}\vec{k}$

$$=(1-4)\vec{i}-(3+2)\vec{j}+(-6-1)\vec{k}=-3\vec{i}-5\vec{j}-7\vec{k}$$

ដូចនេះ $\vec{v}\times\vec{u}=-3\vec{i}-5\vec{j}-7\vec{k}$

គ. $\vec{v}\times\vec{v}$

គេបាន៖ $\vec{v}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&1&-2\\3&1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2\\1&-2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3&-2\\3&-2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3&1\\3&1\end{vmatrix}\vec{k}$

$$=(-2+2)\vec{i}-(-6+6)\vec{j}+(3-3)\vec{k}=\vec{0}$$

ដូចនេះ $\vec{v}\times\vec{v}=\vec{0}$

១.២.លក្ខណៈផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ

បើ $\vec{u}$ $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ជាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ និង c ជាចំនួនពិត នោះគេបាន

1. $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$
2. $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$
3. $c(\vec{v}\times\vec{u})=(c\vec{v})\times\vec{u}=\vec{v}\times(c\vec{u})$
4. $\vec{u}\times\vec{0}=\vec{0}\times\vec{u}=\vec{0}$
5. $\vec{v}\times\vec{v}=\vec{0}$
6. $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

២. បំណកស្រាយផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រតាមបែបធរណីមាត្រ

បើ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ខុសពីសូន្យជាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ និងតាង θ ជាមុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ នោះគេបាន

1. $\vec{u}\times\vec{v}$ អរត្តូកូណាល់ទៅនឹង $\vec{u}$ ផង និង $\vec{v}$ ផង
2. $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$
3. បើ $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ នោះ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែនឹងគ្នា
4. $S=|\vec{u}\times\vec{v}|$ គឺជាផ្ទៃក្រឡារបស់ប្រលេឡូក្រាមដែលសង់លើវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$
5. $S'=\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$ គឺជាផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណដែលសង់លើវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$

ឧទាហរណ៍១៖ គេឲ្យបីចំណុច $A(2,1,1)$,$B(0,4,1)$ និង $C(-2,1,4)$ នៅក្នុងលំហ។
គណនាផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ ABC

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ ABC

គេមានបីចំណុច $A(2,1,1)$,$B(0,4,1)$ និង $C(-2,1,4)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(0-2,4-1,1-1)=(-2,3,0)$

$\overrightarrow{AC}=(-2-2,1-1,4-1)=(-4,0,3)$

នោះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 3 & 0\\ -4 & 0 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -4 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -4 & 0\end{vmatrix}\vec{k}=9\vec{i}+6\vec{j}+12\vec{k}$

គេបាន៖ $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{9^2+6^2+12^2}=3\sqrt{29}$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ **ABC** គឺ $S_{ABC}=3\sqrt{29}$ ឯកតាផ្ទៃ

ឧទាហរណ៍២៖គេឲ្យបួនចំណុច $A(0,-2,0)$,$B(-4,1,2)$,$C(0,3,7)$និង $D(4,0,5)$ ក្នុងលំហ។

បង្ហាញថា **ABCD** ជាប្រលេឡូក្រាម និង គណនាផ្ទៃក្រឡារបស់ប្រលេឡូក្រាម **ABCD**។

ដំណោះស្រាយ៖

- បង្ហាញថា **ABCD** ជាប្រលេឡូក្រាម

គេមាន $A(0,-2,0)$,$B(-4,1,2)$,$C(0,3,7)$និង $D(4,0,5)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(-4-0\,,1+2\,,2-0)=(-4,3,2)$

$\overrightarrow{DC}=(0-4\,,3-0\,,7-5)=(-4,3,2)$

$\overrightarrow{AD}=(4-0,0+2,5-0)=(4,2,5)$

ដោយ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=(4,2,5)$ និង $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(-4,3,2)$

គេបាន **ABCD** ជាប្រលេឡូក្រាម

- គណនាផ្ទៃក្រឡារបស់ប្រលេឡូក្រាម **ABCD**

ផ្ទៃក្រឡារបស់ប្រលេឡូក្រាម **ABCD** គឺ $S=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 3 & 2\\ 4 & 2 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-4 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=11\vec{i}+28\vec{j}-20\vec{k}$

គេបាន៖ $S=\sqrt{11^2+28^2+(-20)^2}=\sqrt{1305}$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡារបស់ប្រលេឡូក្រាម **ABCD** គឺ $S=\sqrt{1305}$ ឯកតាផ្ទៃ

៣.ផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

៣.១.និយមន័យ

គេមាន៖ $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ និង $\vec{w}=(x_3,y_3,z_3)$ ជាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

គេបានផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រក្នុងលំហគឺជាចំនួនពិត កំណត់ដោយ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$

ដែលជាដេទែរមីណង់លំដាប់បី ដោយដាក់កូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ក្នុងជួរដេកទី១ កូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ ក្នុងជួរដេកទី២ និង កូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\vec{w}$ ក្នុងជួរដេកទី៣

៣.២. អនុវត្តន៍ផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

គេមាន វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ជាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

- មាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែតដែលសង់លើវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ គឺកំណត់ដោយ $V=\left|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\right|$

- មាឌរបស់តេត្រាអែត គឺកំណត់ដោយ $\mathbf{W}=\dfrac{|\vec{\mathbf{u}}\cdot(\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{w}})|}{6}$

ឧទាហរណ៍៖ គណនាមាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែត មាឌរបស់តេត្រាអែតដែលសង់លើវ៉ិចទ័រ $\vec{\mathbf{u}}=(3,-5,1)$ $\vec{\mathbf{v}}=(0,2,-2)$ និង $\vec{\mathbf{w}}=(3,1,1)$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាមាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែត មាឌរបស់តេត្រាអែត

គេមាន $\vec{\mathbf{u}}=(3,-5,1)$ $\vec{\mathbf{v}}=(0,2,-2)$ និង $\vec{\mathbf{w}}=(3,1,1)$

គេបាន $\vec{\mathbf{u}}\cdot(\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{w}})=\begin{vmatrix}3 & -5 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=(3)\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}-(-5)\begin{vmatrix}0 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}+(1)\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=3(4)+5(6)+1(-6)=36$

មាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែតគឺ $\mathbf{V}=|\vec{\mathbf{u}}\cdot(\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{w}})|=36$

មាឌរបស់តេត្រាអែតគឺ $\mathbf{W}=\dfrac{|\vec{\mathbf{u}}\cdot(\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{w}})|}{6}=\dfrac{36}{6}=6$

ដូចនេះ មាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែតគឺ $\mathbf{V}=36$ ឯកតាមាឌ

មាឌរបស់តេត្រាអែតគឺ $\mathbf{W}=6$ ឯកតាមាឌ