

១. បន្ទាត់ និង ប្លង់ក្នុងលំហ

១.១. បន្ទាត់ក្នុងលំហ

បន្ទាត់ L មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (a, b, c)$ ហើយកាត់តាមចំណុច $P(x_0, y_0, z_0)$ គេបាន

- សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L គឺ:
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$
- បើ $a, b, c \neq 0$ គេអាចសរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ L គឺ:
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

ឧទាហរណ៍១: រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំណុច $A(1, -2, 4)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (2, 4, -4)$ ។

ដំណោះស្រាយ: រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ L

ដោយ បន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច $A(1, -2, 4) \Rightarrow x_0 = 1, y_0 = -2, z_0 = 4$

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (2, 4, -4) \Rightarrow a = 2, b = 4, c = -4$

គេបានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L គឺ
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 4t \\ z = 4 - 4t \end{cases} , (t \in \mathbb{R})$$

សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ L គឺ
$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{4} = \frac{z - 4}{-4}$$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L គឺ
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 4t \\ z = 4 - 4t \end{cases} , (t \in \mathbb{R})$$

សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ L គឺ
$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{4} = \frac{z - 4}{-4}$$

១.២. ប្លង់ក្នុងលំហ

ប្លង់ P មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (a, b, c)$ ហើយកាត់តាមចំណុច $M(x_0, y_0, z_0)$ នោះគេបាន

- សមីការស្តង់ដារនៃប្លង់ P គឺ: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$
- សមីការទូទៅនៃប្លង់ P គឺ: $ax + by + cz + d = 0$ ដែល $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$

ឧទាហរណ៍៖ រកសមីការទូទៅនៃប្លង់ P កំណត់ដោយចំណុច $A(2, 1, 1), B(0, 4, 1)$ និង $C(-2, 1, 4)$ ។

ដំណោះស្រាយ: រកសមីការទូទៅនៃប្លង់ P

សមីការប្លង់ P គឺ $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

ដោយ ប្លង់ P កាត់តាមចំណុច $A(2, 1, 1) \Rightarrow x_0 = 2, y_0 = 1, z_0 = 1$

ហើយ មានកែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

ដោយ៖ $\overrightarrow{AB} = (0-2, 4-1, 1-1) = (-2, 3, 0)$

$\overrightarrow{AC} = (-2-2, 1-1, 4-1) = (-4, 0, 3)$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 9\vec{i} + 6\vec{j} + 12\vec{k} \Rightarrow a=9, b=6, c=12$$

គេបាន សមីការប្លង់ P គឺ $9(x-2) + 6(y-1) + 12(z-1) = 0$

$$3(x-2) + 2(y-1) + 4(z-1) = 0$$

$$3x + 2y + 4z - 12 = 0$$

ដូចនេះ សមីការទូទៅនៃប្លង់ P គឺ $3x + 2y + 4z - 12 = 0$

២. សមីការស្វ័យ

២.១. ចម្ងាយរវាងពីរចំណុចក្នុងលំហ

គេមានចំណុចពីរ $P(x_1, y_1, z_1)$ និង $Q(x_2, y_2, z_2)$ ។ ចម្ងាយរវាងចំណុច P និង Q កំណត់ដោយ៖

$$d = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

គេមានស្វ័យផ្ចិត $C(x_0, y_0, z_0)$ ដែលមានកាំ R គឺជាសំណុំចំណុច $P(x, y, z)$ ដែលមានចម្ងាយថេរពីផ្ចិត $C(x_0, y_0, z_0)$ គេបាន

- សមីការស្តង់ដារនៃស្វ័យ គឺ៖ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

២.២. សមីការស្វ័យ

ឧទាហរណ៍៖ រកសមីការស្តង់ដារនៃស្វ័យដែលមានចំណុច A(2, 2, 0) និង B(0, 0, 2) ជាចំណុចចុងសងខាងនៃអង្កត់ផ្ចិត។

ដំណោះស្រាយ៖ រកសមីការស្តង់ដារនៃស្វ័យ

សមីការស្វ័យ (S) គឺ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

គេមាន ផ្ចិត $C(x_0, y_0, z_0)$ ជាចំណុចកណ្តាលនៃចំណុច A(2, 2, 0) និង B(0, 0, 2)

$$C\left(\frac{2+0}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (1, 1, 1) \Rightarrow x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 1$$

$$\text{កាំ } R = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = \frac{\sqrt{(0-2)^2 + (0-2)^2 + (2-0)^2}}{2} = \sqrt{3}$$

គេបានសមីការស្វ័យ (S) គឺ $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (\sqrt{3})^2$

ដូចនេះ សមីការស្វ័យ (S) គឺ $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$

៣. ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅប្លង់មួយ និង ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅប្លង់មួយក្នុងលំហ

៣.១. ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅប្លង់មួយក្នុងលំហ

ចម្ងាយ $d(A, (P))$ រវាងចំណុច $A(x_0, y_0, z_0)$ ទៅប្លង់ $(P): ax + by + cz + d = 0$ មានរូបមន្តទូទៅដូចខាងក្រោម៖

$\vec{n} = (a, b, c)$ កំណត់ដោយ៖ $d(A, (P)) = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ ដែល $M(x, y, z)$ ជាចំណុចនៅលើប្លង់

$$d(A, (P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ឧទាហរណ៍៖ រកចម្ងាយពីចំណុច $A(1, 5, -4)$ ទៅប្លង់ $(P): 3x - y + 2z = 6$

ដំណោះស្រាយ៖ រកចម្ងាយពីចំណុច A ទៅប្លង់ (P)

តាមរូបមន្ត៖ $d(A, (P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

គេមាន៖ $A(1, 5, -4) \Rightarrow x_0 = 1, y_0 = 5, z_0 = -4$

ប្លង់ $(P): 3x - y + 2z = 6 \Rightarrow 3x - y + 2z - 6 = 0$

$\Rightarrow a = 3, b = -1, c = 2, d = -6$

នោះ $d(A, (P)) = \frac{|3 \times 1 + (-1) \times 5 + 2 \times (-4) - 6|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|-16|}{\sqrt{14}} = \frac{16}{\sqrt{14}} = \frac{8\sqrt{14}}{7}$

ដូចនេះ ចម្ងាយពីចំណុច A ទៅប្លង់ (P) គឺ $d(A, (P)) = \frac{8\sqrt{14}}{7}$ ឯកតាប្រវែង

៣.២. ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅបន្ទាត់មួយក្នុងលំហ

ចម្ងាយរវាងចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (L) ដែលមានរូបប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $\vec{u} = (a, b, c)$

កំណត់ដោយ $d(A, L) = \frac{|\vec{AM} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$ ដែល M ជាចំណុចនៅលើបន្ទាត់ (L)

ឧទាហរណ៍៖ រកចម្ងាយពីចំណុច $A(3, -1, 4)$ ទៅបន្ទាត់ (L) ដែលមានសមីការ $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -2t \\ z = 1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

ដំណោះស្រាយ៖ រកចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (L)

គេមាន៖ ចំណុច $A(3, -1, 4)$

បន្ទាត់ $(L): \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -2t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$ នាំឲ្យ ចំណុច $M(-2, 0, 1)$ ជាចំណុចនៅលើបន្ទាត់ (L)

និង វ៉ិចទ័រប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $\vec{u} = (3, -2, 4)$

គេបាន៖ $\vec{AM} = (-2 - 3, 0 + 1, 1 - 4) = (-5, 1, -3)$

$$\text{នោះ } \overrightarrow{AM} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ = -2\vec{i} + 11\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$\text{គេបាន៖ } d(A, L) = \frac{|\overrightarrow{AM} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 11^2 + 7^2}}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{6}$$

ដូចនេះ ចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (L) គឺ $d(A, L) = \sqrt{6}$ ឯកតាប្រវែង

៣.២. ចម្ងាយរវាងពីរបន្ទាត់នៅក្នុងលំហ

$$\text{ករណីបន្ទាត់ស្របគ្នា} \quad d(L_1, L_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_2} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

$$\text{ករណីបន្ទាត់មិនស្របគ្នា} \quad d(L_1, L_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|}$$

- សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L គឺ:
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$
- បើ $a, b, c \neq 0$ គេអាចសរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ L គឺ:
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (a, b, c)$ និង ចំណុចកាត់ $M(x_0, y_0, z_0)$

ដែល៖ $(L_1) \parallel (L_2) \Leftrightarrow \vec{u}_1 = k\vec{u}_2, k \in \mathbb{R}$

ឧទាហរណ៍៖ រកចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ $(L_1): \frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-4}{4}$ និង $(L_2): \frac{x+2}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{4}$

ដំណោះស្រាយ៖ រកចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2)

(L_1) កាត់តាមចំណុច $M_1(3, -1, 4)$ វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_1 = (3, -2, 4)$

(L_2) កាត់តាមចំណុច $M_2(-2, 0, 1)$ វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_2 = (3, -2, 4)$

ដោយ $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = (3, -2, 4) \Leftrightarrow (L_1) \parallel (L_2)$

$$\text{តាម៖ } d(L_1, L_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_2} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = (-2-3, 0+1, 1-4) = (-5, 1, -3)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1 M_2} \times \vec{u} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (4-6)\vec{i} - (-20+9)\vec{j} + (10-3)\vec{k} \\ &= -2\vec{i} + 11\vec{j} + 7\vec{k} = (-2, 11, 7)\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{M_1 M_2} \times \vec{u}| = \sqrt{10^2 + 11^2 + 7^2} = \sqrt{174}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

$$\text{គេបាន: } d(L_1, L_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_2} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{6}$$

ដូចនេះ $d(L_1, L_2) = \sqrt{6}$ ឯកតាប្រវែង

ឧទាហរណ៍២: រកចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) ដែល

$$(L_1): \begin{cases} x = 3t \\ y = -t + 2 \\ z = t - 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad \text{និង} \quad (L_2): \begin{cases} x = 4s + 1 \\ y = s - 2 \\ z = -3s - 3 \end{cases} ; s \in \mathbb{R}$$

ដំណោះស្រាយ: រកចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2)

(L_1) កាត់តាមចំណុច $M_1(0, 2, -1)$ វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_1 = (3, -1, 1)$

(L_2) កាត់តាមចំណុច $M_2(1, -2, -3)$ វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_2 = (4, 1, -3)$

ដោយ៖ $\vec{u}_1 \neq k\vec{u}_2 \Leftrightarrow (L_1) \nparallel (L_2)$

$$\text{តាម៖ } d(L_1, L_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|}$$

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = (1-0, -2-2, -3+1) = (1, -4, -2)$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (3-1)\vec{i} - (-9-4)\vec{j} + (3+4)\vec{k} \\ &= 2\vec{i} + 13\vec{j} + 7\vec{k} = (2, 13, 7)\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) = (1, -4, -2) \cdot (2, 13, 7) = (1)(2) + (-4)(13) + (-2)(7) = -64$$

$$|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2| = \sqrt{2^2 + 13^2 + 7^2} = \sqrt{222}$$

$$\text{គេបាន៖ } d(L_1, L_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|} = \frac{|-64|}{\sqrt{222}} = \frac{64\sqrt{222}}{222} = \frac{32\sqrt{222}}{111}$$

ដូចនេះ $d(L_1, L_2) = \frac{32\sqrt{222}}{111}$ ឯកតាប្រវែង