

មេរៀនទី១

លីមីតនៃអនុគមន៍

១.លក្ខណៈនៃលីមីត

$$១. \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)]$$

$$២. \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)]$$

$$៣. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

$$៤. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

❖ លក្ខណៈគ្រឹះនៃលីមីត

$$១. \lim_{x \rightarrow a} k = k, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{x} = \infty, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$២. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$៣. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty,$$

$$៤. e^x > x > \ln x \quad \text{ពេល } x \rightarrow +\infty$$

$$៥. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty$$

$$៦. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

២.លីមីតរាងមិនកំណត់

$$២.១. \text{លីមីតរាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\text{គេមាន } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{ដែល } f(a) = 0 \text{ និង } g(a) = 0$$

ដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ គេត្រូវ៖

១.ត្រូវសរសេរ $f(x)$ និង $g(x)$ ជាផលគុណកត្តានៃ $x - a$

២.សម្រួលកត្តា $x - a$ នោះគេទទួលបានលីមីតនៃកន្សោមថ្មី

៣.គណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី

ឧទាហរណ៍៖ គណនាលីមីត

$$ក. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x^2 - 1}$$

$$ខ. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 5x + 4}$$

$$គ. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{3x^3 - 27x}$$

បង្ហាញ៖ គណនាលីមីត

$$ក. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x^2 - 1} \quad \text{រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+7)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+7}{x+1} = \frac{1+7}{1+1} = 4$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x^2 - 1} = 4$

ខ. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 5x + 4}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$
 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{x+4} = \frac{-1+3}{-1+4} = \frac{2}{3}$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 5x + 4} = \frac{2}{3}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{3x^3 - 27x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$
 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{3x^3 - 27x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{3x(x^2 - 9)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{3x(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{3x(x+3)} = \frac{1}{3 \times 3(3+3)} = \frac{1}{54}$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{3x^3 - 27x} = \frac{1}{54}$

❖ លីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ ករណីភាគយក ឬ ភាគបែងជាប់រ៉ាឌីកាល់

គេមាន $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ដែល $f(a) = 0$ និង $g(a) = 0$

ដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ ករណីភាគយក ឬ ភាគបែងជាប់រ៉ាឌីកាល់គេត្រូវ៖

១. បំបាត់រ៉ាឌីកាល់នៃភាគយក ឬ ភាគបែង

២. ត្រូវសរសេរភាគយក ឬ ភាគបែងជាផលគុណកត្តានៃ $x - a$

៣. សម្រួលកត្តា $x - a$ នោះគេទទួលបានលីមីតនៃកន្សោមថ្មី

៤. គណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី

ឧទាហរណ៍៖ គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x^3-1}$ ខ. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

ចម្លើយ៖ គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x^3-1}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8}-3)}{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x+8}+3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x+8}+3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x^2+x+1)(\sqrt{x+8}+3)}$
 $= \frac{1}{(1^2+1+1)(\sqrt{1+8}+3)} = \frac{1}{18}$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x^3-1} = \frac{1}{18}$

$$\begin{aligned}
& ខ. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} \quad \text{រាងមិនកំណត់} \quad \frac{0}{0} \\
& \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 2^2)}{(x - 8)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 2^2)} \\
& = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{(x - 8)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 2^2)} \\
& = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 2^2} \\
& = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{\sqrt[3]{8^2} + 2\sqrt[3]{8} + 2^2} = \frac{1}{4 + 4 + 4} = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} = \frac{1}{12}$$

២.២.លីមីតរាងមិនកំណត់ $+\infty - \infty$

❖ ចំពោះអនុគមន៍ណាមួយ អ៊ីចស្ប៉ូណង់ស្យែល ឬ លោការីតទូទៅ

ដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំណត់ $+\infty - \infty$ គេត្រូវ៖

១. ដាក់តួដែលមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេជាកត្តារួម

២. រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី

ឧទាហរណ៍៖ គណនាលីមីត

$$ក. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + 5)$$

$$ខ. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2 + 5)$$

$$គ. \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^x + x + \ln x)$$

ចម្លើយ៖ គណនាលីមីត

$$ក. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + 5) \quad \text{រាងមិនកំណត់} \quad +\infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3} \right) = +\infty (1 - 0 + 0) = +\infty$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + 5) = +\infty$$

$$ខ. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2 + 5) \quad \text{រាងមិនកំណត់} \quad +\infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2 + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x} + \frac{5}{e^x} \right) = +\infty (1 - 0 + 0) = +\infty$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2 + 5) = +\infty$$

$$គ. \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^x + x + \ln x) \quad \text{រាងមិនកំណត់} \quad +\infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^x + x + \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(-1 + \frac{x}{e^x} + \frac{\ln x}{e^x} \right) = +\infty (-1 + 0 + 0) = -\infty$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^x + x + \ln x) = -\infty$$

❖ ចំពោះអនុគមន៍អសនិទាន

ដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំណត់ $+\infty - \infty$ គេត្រូវ៖

១. បំបាត់ភាគីកាត់

២. ដាក់តួដែលមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេជាកត្តារួម

៣. រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី

ឧទាហរណ៍៖ គណនាលីមីត $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 1} - x)$

ចម្លើយ៖ គណនាលីមីត

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 1} - x)$ រាងមិនកំណត់ $+\infty - \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 1} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x + 1} - x)(\sqrt{x^2 - 3x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 - 3x + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 3x + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 1}{\sqrt{x^2 - 3x + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 1}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 1}{x \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{-3 + 0}{\sqrt{1 - 0 + 0} + 1} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 1} - x) = -\frac{3}{2}$

២.៣. លីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

ដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$ គេត្រូវ៖

១. ដាក់តួដែលមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេនៃភាគយកនិងភាគបែងជាកត្តារួម

២. សម្រួលកត្តារួម

៣. រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី

ឧទាហរណ៍៖ គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 4}}{x - 2}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 4}$

គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x - \ln x}{x^2 + x \ln x}$

ចម្លើយ៖ គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 4}}{x - 2}$ លីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 4}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}\right)}}{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}}{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)}$$

ករណី៖ $x \rightarrow +\infty$ គេបាន

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 4}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}}{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{1 - 0 + 0}}{1 - 0} = 1$$

ករណី៖ $x \rightarrow -\infty$ គេបាន

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 4}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}}{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{-\sqrt{1 - 0 + 0}}{1 - 0} = -1$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 4}}{x - 2} = \pm 1$

ខ. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 4}$ លីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{4}{x}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{4}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 4} = 1$

គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x - \ln x}{x^2 + x \ln x}$ លីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x - \ln x}{x^2 + x \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 + \frac{x}{e^x} - \frac{\ln x}{e^x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1 + \frac{x}{e^x} - \frac{\ln x}{e^x}}{1 + \frac{\ln x}{x}} = +\infty \times \frac{1 + 0 - 0}{1 + 0} = +\infty$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x - \ln x}{x^2 + x \ln x} = +\infty$

២.៤. លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

រូបមន្តលីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1, a \neq 0$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1, a \neq 0$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{ax} = 0, a \neq 0$$

ឧទាហរណ៍១៖គណនាលីមីត

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

$$\text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$$

$$\text{គ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos 2x}$$

ឧទាហរណ៍២៖គណនាលីមីតដោយការតាង

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 4}$$

$$\text{ខ. } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$$

$$\text{គ. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + \cos x} - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$$

២.៥.លីមីតនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និង អនុគមន៍លោការីតនេពែរ

រូបមន្តលីមីតនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និង អនុគមន៍លោការីតនេពែរ

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax} = 1, a \neq 0$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

ឧទាហរណ៍១៖គណនាលីមីត

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$$

$$\text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{2x}$$

$$\text{គ. } \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{3x}}$$

ឧទាហរណ៍២៖គណនាលីមីតដោយការតាង

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{1-x}$$

$$\text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x^2 - 4}$$

$$\text{គ. } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}$$