មេរៀនទី២ ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

១.សញ្ញាណនៃអនុគមន៍ជាប់

កាលណាគេគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ នៅលើ ចន្លោះ I មួយនៃដែនកំណត់ដោយមិនដាច់គ្នានោះគេបានគំនូសមួយដែលជាខ្សែជាប់ ។

គេថាអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់គ្រប់ចំណុចនៃចន្លោះ I ។

២.ភាពជាប់ត្រង់មួយចំណុច

និយមន័យ៖ អនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=c$ កាលណា f បំពេញលក្ខខណ្ឌទាំងបីដូចខាងក្រោម៖

១. f កំណត់ចំពោះ $x=c$

២. f មានលីមីតកាលណា $x\to c$

៣. $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

សម្គាល់៖ បើអនុគមន៍ $y=f(x)$ មិនជាប់ត្រង់ចំណុច $x=c$ គេថា f ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ចំណុច $x=c$

ឧទាហរណ៍១៖ អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=x^2-4$ ។ តើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=2$ ឬទេ?

ចម្លើយ៖ បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=2$ ឬទេ

គេមាន៖ $f(2)=2^2-4=0$ នាំឲ្យ f កំណត់ចំពោះ $x=2$

ហើយ៖ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=0$

គេបាន៖ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=0$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=2$

ឧទាហរណ៍២៖ គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{if } x\neq 2\\ 4 & \text{if } x=2\end{cases}$ ។

បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=2$

ចម្លើយ៖ បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=2$

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{if } x\neq 2\\ 4 & \text{if } x=2\end{cases}$

គេបាន៖ $f(2)=4$ នាំឲ្យ f កំណត់ចំពោះ $x=2$

ហើយ៖ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$

នាំឲ្យ៖ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=4$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=2$

៣.លក្ខណៈជាប់នៃអនុគមន៍

បើអនុគមន៍ f និង g ជាប់ត្រង់ $x=c$ នោះគេបាន៖

១. $f(x)+g(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=c$

២. $f(x)-g(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=c$

៣. $f(x)g(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=c$

៤. $kf(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=c$ (ដែល k ជាចំនួនពិត)

៥. $\frac{f(x)}{g(x)}$ ជាប់ត្រង់ $x=c$ (ដែល $g(x)\neq 0$)

❖ តាមលក្ខណៈខាងលើនេះ គេបាន៖

១.អនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេទី n ៖ $P(x)=ax^n+bx^{n-1}+....$ ជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ x

២.អនុគមន៍សនិទាន៖ $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ ជាអនុគមន៍ជាប់កាលណា $Q(x)\neq 0$

៣.អនុគមន៍រ៉ាឌីកាល់ $f(x)=\sqrt[2n]{P(x)}$ ជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ដែល $P(x)\geq 0$

៤.អនុគមន៍រ៉ាឌីកាល់ $f(x)=\sqrt[2n+1]{P(x)}$ ជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ដែល $P(x)$ ជាចំនួនពិត

៥.អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ $f(x)=\cos x$, $f(x)=\sin x$ ជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ x

៦.អនុគមន៍ $f(x)=\tan x$ ជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ $x\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$

៧.អនុគមន៍ $f(x)=\cot x$ ជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ $x\neq\pi+2k\pi$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$

ឧទាហរណ៍១៖ រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍

ក. $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$ ខ. $f(x)=x+1-\frac{7}{x+3}$ គ. $f(x)=\frac{x+3}{x^2-3x-10}$

ចម្លើយ៖ រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍

ក. $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា៖ $x+2\neq 0\Rightarrow x\neq -2$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ $D_f=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

ខ. $f(x)=x+1-\frac{7}{x+3}$

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា៖ $x+3\neq 0\Rightarrow x\neq -3$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ $D_f=(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

គ. $f(x)=\frac{x+3}{x^2-3x-10}$

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា៖ $x^2-3x-10\neq 0$

$$(x+2)(x-5)\neq 0\Rightarrow x\neq -2, x\neq 5$$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2,5\}$

ឧទាហរណ៍២៖រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍

ក. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ ខ. $f(x)=\sqrt{27-3x}$ គ. $f(x)=\sqrt{2x^2-x-1}$

ចម្លើយ៖ រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍

អនុគមន៍f មានន័យកាលណា៖ $\dfrac{x+3}{x-2}\geq 0$

$x+3=0\Rightarrow x=-3$

$x-2=0\Rightarrow x=2$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+3}{x-2}\geq 0$		$+$	0	$-$	||	$+$	

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍f គឺ $D_f=(-\infty,-3]\cup(2,+\infty)$

ខ. $f(x)=\sqrt{27-3x}$

អនុគមន៍f មានន័យកាលណា៖ $27-3x\geq 0\ \Rightarrow x\leq 9$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍f គឺ $D_f=(-\infty,9]$

គ. $f(x)=\sqrt{2x^2-x-1}$

អនុគមន៍f មានន័យកាលណា៖ $2x^2-x-1\geq 0$

ឲ្យ៖ $2x^2-x-1=0$

$\Delta=(-1)^2-4(2)(-1)=9\ \Rightarrow\sqrt{\Delta}=3$

$x=\dfrac{1-3}{2\times 2}=-\dfrac{1}{2}\ ,\ x=\dfrac{1+3}{2\times 2}=1$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍f គឺ $D_f=\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\ 1,+\infty\right)$

៤.ភាពជាប់លើចន្លោះ

និយមន័យ៖

១. អនុគមន៍f ជាប់លើចន្លោះបើក (a,b) លុះត្រាតែ f ជាប់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x នៃចន្លោះបើកនោះ។

២. អនុគមន៍f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ លុះត្រាតែ f ជាប់ចំពោះចន្លោះបើក (a,b) និងមានលីមីត

គឺ $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ និង $\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$ ។

អនុគមន៍ f ជាប់ a ត្រង់ខាងស្តាំ និង អនុគមន៍ f ជាប់ b ត្រង់ខាងឆ្វេង។

ឧទាហរណ៍១៖ សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x+2}{x-3}$ នៅលើចន្លោះ $(-2,3)$ និង $[-2,3]$ ។

ចម្លើយ៖ សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x+2}{x-3}$ នៅលើចន្លោះ $(-2,3)$ និង $[-2,3]$

ដោយ៖ អនុគមន៍ $f(x)=\frac{x+2}{x-3}$ មានន័យចំពោះ គ្រប់តម្លៃ $x\neq 3$

នាំឲ្យ៖អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបើក $(-2,3)$

តែមិនជាប់លើចន្លោះបិទ $[-2,3]$ ព្រោះ $f(3)=\frac{3+2}{3-3}=\frac{5}{0}$ មិនកំណត់

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)=\frac{x+2}{x-3}$ ជាប់នៅលើចន្លោះ $(-2,3)$ និងតែមិនជាប់លើចន្លោះ $[-2,3]$

ឧទាហរណ៍២៖ សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases} x(x-1) & \text{if } x\leq 3 \\ \frac{x^2-9}{x-3} & \text{if } x>3 \end{cases}$ នៅលើចន្លោះ $(0,3)$ និង $[0,3]$ ។

ចម្លើយ៖ សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f នៅលើចន្លោះ $(0,3)$ និង $[0,3]$

គេមាន៖អនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases} x(x-1) & \text{if } x\leq 3 \\ \frac{x^2-9}{x-3} & \text{if } x\geq 3 \end{cases}$

ចំពោះ $x\leq 3$

គេបាន៖ $f(x)=x(x-1)=x^2-x$ ជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ $x\in\mathbb{R}$

នាំឲ្យ ជាប់នៅលើចន្លោះ $(0,3)$

៥.អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់

ជាទូទៅ៖ បើ f ជាអនុគមន៍មិនកំណត់ត្រង់ $x=a$ និងមាន $\lim_{x\to a} f(x)=L$ នោះអនុគមន៍បន្លាយនៃ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $x=a$ គឺកំណត់ដោយ៖ $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{if } x\neq a \\ L & \text{if } x=a \end{cases}$

ឧទាហរណ៍១៖ គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ ។កំណត់អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ។

ចម្លើយ៖ កំណត់អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f

ដោយ៖គេសង្កេតឃើញថា $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ មានន័យចំពោះ គ្រប់តម្លៃ $x\neq 1$

នាំឲ្យ f ដាច់ត្រង់ $x=1$

ហើយ៖ $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$

ដូចនេះ អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f កំណត់ដោយ៖ $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{if } x\neq 1\\ 2 & \text{if } x=1\end{cases}$

ឧទាហរណ៍២៖ គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ ។កំណត់អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f

ចម្លើយ៖ កំណត់អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f

ដោយ៖ $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ មានន័យចំពោះ គ្រប់តម្លៃ $x\neq 0$

នាំឲ្យ f ដាច់ត្រង់ $x=0$

ហើយ៖ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2=2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f កំណត់ដោយ៖ $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{if } x\neq 0\\ \dfrac{1}{2} & \text{if } x=0\end{cases}$

៦.ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល

ទ្រឹស្តីបទ៖ បើអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ និង k ជាចំនួនពិតមួយនៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ នោះគេមានចំនួនពិត c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះបិទ $[a,b]$ ដែល $f(c)=k$ ។

សម្គាល់៖ ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលអាចប្រើបានចំពោះ $k=0$ ជាពិសេសបើអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ។ បើ $f(a)$ និង $f(b)$ មានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា នោះគេមានចំនួនពិត c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះបិទ $[a,b]$ ដែល $f(c)=0$ ។

ឧទាហរណ៍៖ បង្ហាញថា អនុគមន៍ $f(x)=x^3+2x-1$ មានចំនួនពិត c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះបិទ $[0,1]$ ដែល $f(c)=0$

ចម្លើយ៖ បង្ហាញថា អនុគមន៍ $f(x)=x^3+2x-1$ មានចំនួនពិត c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះបិទ $[0,1]$ ដែល $f(c)=0$

គេមាន៖ $f(0)=0^3+2(0)-1=-1$ និង៖ $f(1)=1^3+2(1)-1=2$

ដោយ៖ $f(0)=-1$ និង $f(1)=2$ មានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា

ដូចនេះ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល គេបានអនុគមន៍ $f(x)=x^3+2x-1$ មានចំនួនពិត c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះបិទ $[0,1]$ ដែល $f(c)=0$ ។